

## Modul Bab 3

### Fungsi Eksponensial, Fungsi Logaritma dan Turunannya

#### 3.1. Fungsi Eksponensial dan Logaritma

Dalam matematika ada berbagai fungsi seperti fungsi polinomial, fungsi akar, fungsi rasional, fungsi trigonometri dan kombinasi dari fungsi-fungsi tersebut. Namun, beberapa aplikasi matematika mungkin juga membutuhkan fungsi-fungsi dalam bentuk yang lain. Pada materi ini akan didefinisikan **fungsi eksponensial natural** (*natural exponential*)  $e^x$  dan kemudian fungsi logaritma natural,  $\ln x$ . Akan ditunjukkan bahwa turunan dari fungsi-fungsi tersebut

memenuhi:  $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$  dan  $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

Kejadian fungsi  $e^x$  mempunyai turunan yang sama dengan dirinya sendiri mempunyai peranan sendiri dalam teori matematika dan aplikasinya. Lebih dalam, hasil ini menyebabkan para ahli matematika memberikan predikat “*natural*”.

#### 3.2. Fungsi Eksponensial

Kita tidak asing dengan istilah suku bunga majemuk atau bunga berbunga dalam investasi pada bank tertentu. Untuk mengantar menuju fungsi eksponensial diberikan contoh sebagai berikut. Seseorang menabung Rp. 1.000.000,- pada sebuah bank yang memberikan suku bunga majemuk rata-rata per tahun sebesar 10% pada awal tahun 2000. Perhitungan akumulasi total tabungan yang ia punyai pada awal tahun 2004 diberikan dalam Tabel 3-1.

**Tabel 3-1.**

Tahun	Jumlah uang (rupiah)	Bunga (rupiah)
2000	1.000.000	0
2001	1.100.000 = 1.000.000(1,1)	100.000
2002	1.210.000 = 1.000.000(1,1) <sup>2</sup>	110.000
2003	1.331.000 = 1.000.000(1,1) <sup>3</sup>	121.000
2004	1.464.100 = 1.000.000(1,1) <sup>4</sup>	133.100

Secara umum apabila modal awal dinotasikan dengan  $P$ , suku bunga dinotasikan dengan  $S_b$ , jumlah uang pada akhir tahun ke- $n$  (awal tahun ke- $n+1$ ) dinotasikan dengan  $S_n$ , maka diperoleh perhitungan sebagai berikut:

$$S_1 = P + P.S_b = P.(1 + S_b)$$

Setelah tahun kedua, jumlah uang yang tersimpan:

$$S_2 = S_1 + S_1.S_b = S_1.(1 + S_b) = P.(1 + S_b).(1 + S_b) = P.(1 + S_b)^2$$

.....

.....

Setelah tahun ke- $n$ , jumlah uang yang tersimpan:

$$S_n = P.(1 + S_b)^n$$

Suku bunga majemuk memberikan contoh pertumbuhan eksponensial dan dimodelkan dalam bentuk fungsi  $y = P.a^x$ , dengan investasi awal  $P$  dan  $a$  sama dengan 1 plus suku bunga rata-rata pertahun yang ditulis dalam desimal. Persamaan  $y = P.a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , memberikan gambaran kelompok fungsi yang dinamakan fungsi eksponensial.

**Definisi 3.1:**

Diberikan bilangan real positif yang tidak sama dengan 1. Fungsi

$$y = f(x) = a^x$$

merupakan fungsi eksponensial dengan basis  $a$ .

Daerah asal :  $(-\infty, \infty)$

Range :  $(0, \infty)$

Beberapa aturan yang berlaku pada fungsi eksponensial diberikan pada Teorema 3.1.

**Teorema 3.1:**

Jika  $a > 0$  dan  $b > 0$ , maka untuk semua bilangan real  $x$  dan  $y$  berlaku:

1.  $a^x.a^y = a^{x+y}$
2.  $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$$3. (a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$$

$$4. a^y \cdot b^y = (ab)^y$$

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Pertumbuhan populasi dapat juga dimodelkan dalam fungsi eksponensial. Dalam metode peramalan digunakan rumus umum  $P_n = P \cdot k^n$ . Aplikasi lainnya adalah perhitungan waktu paruh dari bahan radioaktif, pertumbuhan bakteri dan sebagainya. Selanjutnya yang dimaksud dengan istilah fungsi eksponen adalah

fungsi pangkat dengan basis  $a = e = 2,71828\dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

### 3.3. Fungsi Logaritma

Jika  $a$  merupakan bilangan real positif yang tidak sama dengan 1, maka fungsi eksponensial (pangkat) berbasis  $a$ ,  $f(x) = a^x$ , merupakan fungsi satu-satu. Oleh karena itu fungsi tersebut mempunyai invers yang disebut dengan fungsi logaritma berbasis  $a$ .

#### Definisi 3.2:

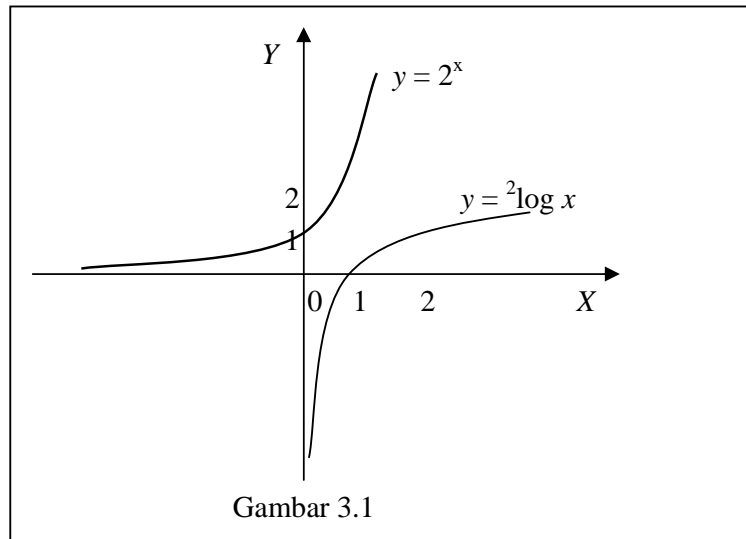
Diberikan  $a$  bilangan real positif yang tidak sama dengan 1. Fungsi logaritma berbasis  $a$ ,  $y = {}^a\log x$ , adalah invers dari fungsi eksponensial berbasis  $a$ .

$$y = {}^a\log x \text{ jika dan hanya jika } x = a^y, \text{ dengan } x > 0.$$

Sedangkan jika diberikan  $a = e$ , maka dinamakan fungsi logaritma natural dan ditulis  $y = \ln x = {}^e\log x$ .

Daerah asal :  $(0, \infty)$ ; Daerah hasil :  $(-\infty, \infty)$

Grafik fungsi eksponensial dan logaritma berbasis 2 disajikan pada Gambar 3.1.



Beberapa sifat fungsi logaritma diberikan berikut ini:

1.  $a^{\log x} = x$  dan  ${}^a \log a^x = x$
2.  ${}^a \log xy = {}^a \log x + {}^a \log y$
3.  ${}^a \log \frac{x}{y} = {}^a \log x - {}^a \log y$
4.  ${}^a \log x = \frac{{}^b \log x}{{}^b \log a} = \frac{{}^e \log x}{{}^e \log a} = \frac{\ln x}{\ln a}$
5.  ${}^a \log x^y = y \cdot {}^a \log x$

### 3.4. Turunan Fungsi Eksponen

Perhatikan bahwa  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ , coba Anda hitung dengan pendekatan komputasi

Dengan menggunakan definisi turunan diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(e^x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x \end{aligned}$$

Jadi diperoleh:  $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ .

Secara umum untuk  $u = f(x)$  dengan  $u' = f'(x) = du/dx$  ada, berlaku

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

Contoh:

$y = e^{2x+1}$ . Perhatikan bahwa dalam soal ini  $u = 2x + 1$ , sehingga  $du/dx = 2$ .

Diperoleh:  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^{2x+1} \cdot 2 = 2e^{2x+1}$ .

### 3.5. Turunan $a^x$

Untuk mencari turunan fungsi eksponensial berbasis  $a$  dikerjakan dengan menggunakan sifat 1 dan 4 pada fungsi logaritma.

$$\begin{aligned} a^x &= e^{\log a^x} = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(a^x) &= \frac{d}{dx}(e^{x \ln a}) = e^{x \ln a} \cdot \frac{d}{dx}(x \ln a) = a^x \cdot \ln a \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa  $\ln a$  merupakan suatu konstanta sehingga untuk  $u = x \ln a$  diperoleh  $du/dx = \ln a$ .

Secara umum untuk  $u = f(x)$  dengan  $u' = f'(x) = du/dx$  ada, berlaku

$$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \cdot \ln a \cdot \frac{du}{dx}$$

Contoh:

$$y = 3^{\sin x}. \quad \text{Dalam soal ini } u = \sin x \text{ sehingga } du/dx = \cos x.$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 3^{\sin x} \cdot \ln 3 \cdot \cos x$$

### 3.6. Teknik Logaritma untuk Penyelesaian Soal Turunan.

Hasil pemahaman Anda akan sangat membantu dalam menyelesaikan beberapa soal turunan yang rumit yang akan dijelaskan dalam penggunaan teknik logaritma untuk menyelesaikan soal turunan berikut.

$$\begin{aligned}
 1. \quad y &= \frac{e^{2x}(x-1)^5}{(x^2+1)^4(4-2x)} \\
 \Leftrightarrow \ln y &= \ln \left( \frac{e^{2x}(x-1)^5}{(x^2+1)^4(4-2x)} \right) \\
 \Leftrightarrow \ln y &= \ln(e^{2x}(x-1)^5) - \ln((x^2+1)^4(4-2x)) \\
 \Leftrightarrow \ln y &= \ln e^{2x} + \ln(x-1)^5 - (\ln(x^2+1)^4 + \ln(4-2x)) \\
 \Leftrightarrow \ln y &= 2x + 5\ln(x-1) - 4\ln(x^2+1) - \ln(4-2x) \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= 2 + 5 \cdot \frac{1}{x-1} - 4 \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x - \frac{1}{4-2x} (-2) \\
 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= y \left[ 2 + 5 \cdot \frac{1}{x-1} - 4 \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x - \frac{1}{4-2x} (-2) \right] \\
 &= \frac{e^{2x}(x-1)^5}{(x^2+1)^4(4-2x)} \left[ 2 + 5 \cdot \frac{1}{x-1} - 4 \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x - \frac{1}{4-2x} (-2) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad y &= (x^2+1)^{2x} \\
 \Leftrightarrow \ln y &= \ln(x^2+1)^{2x} = 2x \cdot \ln(x^2+1) \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= 2\ln(x^2+1) + 2x \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \\
 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= y \left[ 2\ln(x^2+1) + \frac{4x^2}{x^2+1} \right] = (x^2+1)^{2x} \left[ 2\ln(x^2+1) + \frac{4x^2}{x^2+1} \right]
 \end{aligned}$$

**Tes Formatif.**

A. Carilah  $dy/dx$  untuk setiap soal berikut:

1.  $y = e^{2x/3}$

2.  $y = e^{\sin x}$

3.  $y = e^{\sin(2x+1)/2}$

4.  $y = \ln x$

5.  $y = {}^a \log x$

6.  $y = x^x$

B. Gunakan Teknik Logaritma untuk menentukan  $dy/dx$  dalam soal-soal berikut ini.

1.  $y = 3^{\csc x}$

2.  $x^{\ln x}$

3.  $y = (\sin x)^x, \quad 0 < x < \pi/2$

4.  $y = \sqrt[5]{\frac{(x-3)^4(x^2+1)}{(2x+5)^3}}$

5.  $y = {}^3 \log(x^2+1)$

6.  $x^{\ln(2x^3+x+4)}$

7.  $y = \sqrt[6]{\frac{(x+4)^3(2x-1)^2}{(3x+7)(4x^2-1)^4}}$