



GRAFIKA GAME

Aditya Wikan Mahastama

mahas@ukdw.ac.id



Rangkuman Transformasi
Dua Dimensi

5

Transformasi (Rangkuman)

Grafika Komputer – Semester Gasal 2009-2010

Dosen: Aditya Wikan Mahastama

Transformasi Dua Dimensi

Adalah transformasi yang diterapkan pada bidang kartesian dua dimensi, dengan sumbu x dan sumbu y. Representasi asli dari transformasi ini hanya bisa digunakan secara non-komposit (satu per satu).

Rotasi

Rotasi terdiri dari 2 macam: rotasi melawan arah jarum jam (counter-clockwise) dan rotasi searah jarum jam (clockwise).

Mengapa ada dua jenis transformasi?

1. Susah untuk menentukan mana yang disebut sudut negatif dan positif, karena di dunia tools pemrograman, kuadran pi adalah counter-clockwise (melawan arah jarum jam), sedangkan di dunia ilmu pengetahuan, kuadran pi adalah clockwise (searah jarum jam)
2. Oleh karena itu, untuk mempermudah, maka disepakati untuk menyebutkan **arah rotasi** untuk setiap transformasinya, sehingga menghilangkan kebingungan

Persamaan asli rotasi:

1. Melawan arah jarum jam (CCW)

$$x' = x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta$$

$$y' = x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta$$

2. Searah jarum jam (CW)

$$x' = x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta$$

$$y' = -x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta$$

Matriks rotasi 2 dimensi:

1. Melawan arah jarum jam

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2. Searah jarum jam

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Dilatasi

Perbesaran / pengecilan koordinat suatu titik dengan faktor **s** terhadap pusat bidang (0, 0) → disebut juga scaling. Untuk perbesaran, nilai $s > 1$, untuk pengecilan, nilai s adalah $0 < s < 1$.

Jika nilai s negatif akan berakibat dilatasi dilakukan pada bidang percerminan terhadap sumbu yang diberi nilai s .

Apakah perbesaran harus dilakukan pada kedua sumbu? Tidak. Perbesaran bisa terhadap sumbu x saja atau y saja. Oleh karena itu ada dua nilai s : s_x untuk sumbu x (s_x) dan s_y untuk sumbu y (s_y). Jika nilai s yang diberikan hanya satu, maka diasumsikan $s_x = s_y$

Persamaan asli dilatasi:

$$x' = s_x \cdot x$$

$$y' = s_y \cdot y$$

Matriks dilatasi 2 dimensi:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Translasi

Pergeseran koordinat suatu titik dengan faktor t terhadap koordinat titik semula \rightarrow disebut juga moving.

Untuk pergeseran positif, nilai $s > 0$, untuk pergeseran negatif, nilai $s < 0$.

Pergeseran bisa dilakukan terhadap sumbu x saja atau y saja. Oleh karena itu ada dua nilai t : t untuk sumbu x (t_x) dan t untuk sumbu y (t_y). Tidak seperti nilai faktor s pada dilatasi, nilai faktor t pada translasi harus diperinci untuk masing-masing sumbu.

Persamaan asli translasi:

$$x' = t_x + x$$

$$y' = t_y + y$$

Matriks translasi 2 dimensi:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Shearing

Pergeseran koordinat suatu titik dengan penambahan faktor k dari sumbu berbeda yang tegak lurus, terhadap koordinat titik semula \rightarrow disebut juga slanting atau pemencengan.

Pemencengan tidak dapat dikatakan, misal 'terhadap sumbu x '; tetapi harus disebutkan sebagai 'paralel terhadap sumbu x '. Untuk sebuah titik mungkin saja efek pemencengan tidak akan terasa, tetapi hasil nyata akan didapatkan jika pemencengan dilakukan terhadap sekumpulan titik yang membentuk sebuah bangun.

Pemencengan bisa dilakukan sejajar dengan sumbu x maupun y . Oleh karena itu nilai k bisa ditaruh di dua posisi yang berbeda, untuk menghasilkan efek yang sesuai.

Persamaan asli shearing:

1. Sejajar / paralel terhadap sumbu x

$$x' = x + k \cdot y$$

$$y' = y$$

2. Searah / paralel terhadap sumbu y

$$x' = x$$

$$y' = y + k \cdot x$$

Matriks shearing 2 dimensi:

1. Sejajar terhadap sumbu x

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2. Sejajar terhadap sumbu y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformasi Affine

Transformasi yang kita kenal dalam bentuk matriks di atas, masih memiliki operasi yang berbeda untuk tiap transformasinya. Ada yang dengan perkalian, ada yang dengan penjumlahan. Oleh karena itu diusahakan supaya setiap matriks transformasi bisa dioperasikan dengan satu operasi saja, dan yang dipilih adalah perkalian.

Jika matriks P adalah sebuah titik (x, y) , M adalah sebuah matriks transformasi dan P' adalah proyeksinya (x', y') , maka:

$$P' = M \cdot P$$

Untuk dapat memenuhi persamaan tersebut, matriks-matriks di atas harus diubah bentuknya, disesuaikan agar semua jenis transformasi tersebut dapat tertampung dalam satu bentuk matriks yang standar. Maka setiap matriks di atas akan direpresentasikan dalam bentuk 3×3 , dan sebuah titik pada bidang koordinat 2 dimensi direpresentasikan sebagai $(x, y, 1)$, sehingga dihasilkan persamaan berikut:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

dengan a, b, c, d, e dan f adalah koefisien transformasinya
Hasil perubahan representasi tersebut adalah sebagai berikut:

Rotasi

Matriks rotasi 2 dimensi:

1. Melawan arah jarum jam

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Searah jarum jam

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dilatasi

Matriks dilatasi 2 dimensi:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Translasi

Matriks translasi 2 dimensi:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Shearing

Matriks shearing 2 dimensi:

1. Sejajar terhadap sumbu x

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Sejajar terhadap sumbu y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformasi Komposit (Composite)

Hadirnya transformasi dalam bentuk affine berarti bahwa serangkaian transformasi yang berurutan dapat dituliskan dalam satu matriks saja, yang merupakan produk perkalian dari seluruh matriks transformasi tersebut.

Sebagai contoh, ada tiga buah transformasi M_1 , M_2 dan M_3 dimana:

M_1 : dilatasi

M_2 : rotasi

M_3 : translasi

Maka dengan cara sebelumnya, untuk mendapatkan koordinat titik P' hasil akhir seluruh transformasi, yang kita lakukan adalah:

$$P'_1 = M_1 \cdot P$$

$$P'_2 = M_2 \cdot P'_1$$

$$P' = M_3 \cdot P'_2$$

Dengan transformasi affine, bisa didapatkan sebuah matriks MC yang komposit; gabungan dari M_1 , M_2 dan M_3 .

$$MC = M_3 \cdot M_2 \cdot M_1$$

$$P' = MC \cdot P$$

Mengapa bisa demikian? Harus diingat bahwa dalam aturan umum perkalian matriks disebutkan bahwa

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

tetapi

$$A \cdot B \cdot C \neq C \cdot B \cdot A, \text{ karena } A \cdot B \neq B \cdot A$$

sehingga dapat dituliskan bahwa:

$$P' = M_3 \cdot P'_2$$

$$P' = M_3 \cdot M_2 \cdot P'_1$$

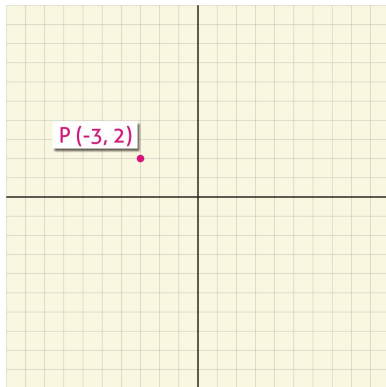
$$P' = M_3 \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot P$$

dan terbentuklah persamaan **$MC = M_3 \cdot M_2 \cdot M_1$**

Contoh aplikasi soal dan jawabannya ada pada halaman berikutnya.

Contoh aplikasi soal:

1.



Apa yang terjadi seandainya titik tersebut **dirotasi 90° melawan arah jarum jam, ditranslasi (-2, -3), didilatasi 3x dan ditranslasi (-3, 2)**? Tuliskan matriks transformasi kompositnya!

Jawab:

Diketahui

$$P = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matriks transformasi komposit:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ & 0 \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -9 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

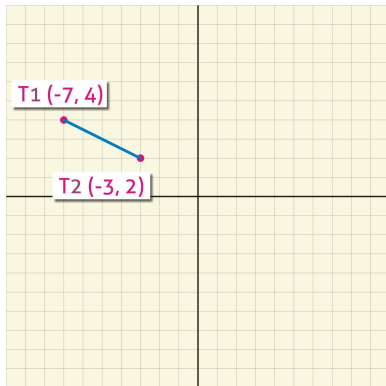
$$M = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -9 \\ 3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Titik hasil proyeksi:

$$P' = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -9 \\ 3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} -15 \\ -16 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.



Apa yang terjadi seandainya kedua titik tersebut **dirotasi 180° searah jarum jam**, **ditranslasi (-3, 2)**, **didilatasi 1.5 ×**? Tuliskan matriks transformasi kompositnya!

Jawab:

Diketahui

$$T_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matriks transformasi komposit:

$$M = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 180^\circ & \sin 180^\circ & 0 \\ -\sin 180^\circ & \cos 180^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & -4.5 \\ 0 & 1.5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 & -4.5 \\ 0 & -1.5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Titik hasil proyeksi:

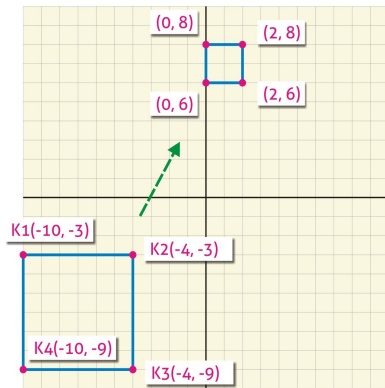
$$T_1' = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 & -4.5 \\ 0 & -1.5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1' = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2' = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 & -4.5 \\ 0 & -1.5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Soal dengan logika



Bagaimana urutan transformasi yang diperlukan untuk mewujudkannya?

Jawab (setiap orang boleh bervariasi):

1. Translasi (4, 3) $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
2. Dilatasi $-1/3$ x $M_2 = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
3. Translasi (0, 6) $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Jikalau ingin dilanjutkan mencari matriks komposit dan buktinya:

Matriks transformasi komposit:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 & -4/3 \\ 0 & -1/3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

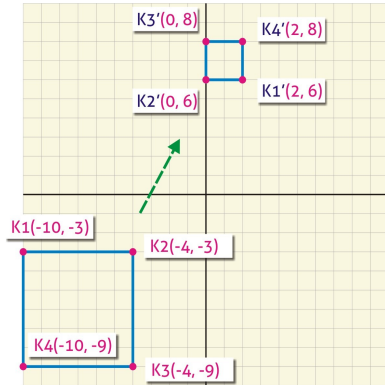
Bukti jika diaplikasikan pada salah satu titik K2(-4, -3):

$$K_2' = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 & -4/3 \\ 0 & -1/3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$K_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Terbukti!

4. Soal dengan logika



Bagaimana urutan transformasi yang diperlukan untuk mewujudkannya?

Jawab (setiap orang boleh bervariasi):

1. Translasi (4, 3) $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
2. Dilatasi $1/3$ x $M_2 = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
3. Rotasi 180° CCW $M_3 = \begin{bmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ & 0 \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
4. Translasi (0, 6) $M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Jikalau ingin dilanjutkan mencari matriks komposit dan buktinya:

Matriks transformasi komposit:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 & -4/3 \\ 0 & -1/3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti jika diaplikasikan pada salah satu titik $K1(-10, -3)$:

$$K_1' = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 & -4/3 \\ 0 & -1/3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -10 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$K_1' = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Terbukti!